

Rigid motion and $SO(3)$

정홍택¹

Abstract

Rigid motion is one extreme side of many body problem. In this article we investigate rigid motion with rigorous mathematical treatment. To do this we introduce matrix group of 3-dim rotations which is called $SO(3)$ and investigate some properties of them.

Contents

1	Introduction	2
2	$SO(3)$ and Sk-Symm(3)	4
3	Rigid motion and $SO(3)$	6
	3.1 Angular velocity	6
	3.2 Angular momentum, moment of inertia and principal axis	8
	3.3 Non-inertia frame	11
4	Eular's equations of rigid body	13
5	Examples	14
	References	16

¹수리과학과, E-mail: htjung@kaist.ac.kr

1 Introduction

고전역학적인 관점에서, 하나의 점질량, 혹은 두 개의 점질량들의 운동을 분석하는 것은 비교적 쉬운 문제에 속한다. 하지만 우리가 다루는 계가 서로 상호작용하는 많은 수의 입자를 포함한다면 이들의 운동을 해석하는 것은 사실상 불가능하다. 심지어 입자의 수가 3개만 되어도 문제를 풀 수 없는 경우가 많다.

그러나 우리 주변의 대부분의 (고전역학적) 물체는 ‘부피’를 가지고 있고, 따라서 수많은 입자들로 이루어져 있다. 따라서 이러한 부피질량, 혹은 질량분포를 다룰 수 없다면 고전역학은 그 의미를 상당 부분 잃게 된다.

다행히도 우리는 이러한 부피질량의 운동을 다루는 강력한 도구를 가지고 있다. 고전역학의 고전적인 결과 중 하나는, 어떤 질량분포가 주어지면, 그 질량분포의 질량중심만큼은 마치 점질량처럼 해석할 수 있다는 것을 말해준다. 따라서 적어도 우리는 질량분포의 운동에 대해서는 상당히 많은 것을 알 수 있다. 하지만 많은 경우, 우리는 질량분포의 운동에 대해 더 많은 것을 원한다.

이러한 문제를 풀기 위해 우리는 극단적인 경우를 먼저 보게 된다. 질량분포의 한 극단은, 바로 계를 구성하는 입자들 사이의 상호작용이 거의 없는 경우이다. 이러한 계를 우리는 이상기체라고 부르며, 열역학, 혹은 통계역학을 사용하여 추가적인 정보를 얻는다. 물론, 이 경우, 계를 이루는 입자의 개별적 운동을 해석하는 것은 여전히 불가능하고, 거시적인 정보(압력, 온도, 등)만을 제한적으로 해석할 수 있다.

그 반대편 극단은, 계를 이루는 입자들의 상호작용이 너무 강하여, 임의의 두 입자 사이의 간격이 시간에 대한 상수가 되는 경우이다. 이러한 계를 바로 강체(rigid body)라고 하며, 고전역학의 도구를 사용해서 부분적으로 해석할 수 있다.

이러한 극단적인 경우에 대해 문제를 해결한 후, 나머지 경우는 양 극단의 경우로 근사하거나 섭동이론을 사용하여 부분적으로 해결할 수 있다. 따라서 강체의 운동을 해결하는 것은 대단히 중요한 의미를 가진다고 할 수 있다.

강체의 운동을 분석하기 전에 조금 더 간단한 경우인 점질량의 운동을 어떻게 해석하였는지를 다시 생각해보자. 점질량의 운동을 분석한다는 것은, 시간에 따른 입자의 위치를 계산한다는 것이다. 즉, \mathbb{R}^3 의 적당한 path $\mathbf{r}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 를 구하는 것이라 할 수 있겠다. 이 때, 참고가 되는 것이 뉴턴의 운동방정식(혹은 라그랑주 방정식)이다.

이 논의를 강체의 운동으로 확장하기 위해서는 관점을 조금 바꿔야 할 필요가 있다. 우선 입자의 궤적 $\mathbf{r}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 가 주어졌다고 하자. 우리는 각각의 $t \in I$ 마다 초기 위치 $\mathbf{r}(0)$ 를 $\mathbf{r}(t)$ 로 보내는 translation $F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 를 대응시킬 것이다. 좀 더 정확하게, $Trans(\mathbb{R}^3)$ 를 group of translations 라 할 때, path $\mathbf{r}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 들의 집합과 함수 $F_t : I \rightarrow Trans(\mathbb{R}^3)$ 들의 집합 사이엔 1대1

대응이 있다. 우리는 앞으로 path대신 그 path에 대응하는 함수,

$$F_t : I \rightarrow Trans(\mathbb{R}^3)$$

를 생각할 것이다. 이 경우 입자의 시간 t 에서의 위치는 간단히

$$F_t(\mathbf{r}(0))$$

로 나타난다.

물리적으로 강체란, 물체를 구성하는 임의의 두 입자 사이의 거리가 변하지 않는 물체를 말한다. 따라서 우리가 이 물체를 \mathbb{R}^3 의 적당한 부분집합 M 으로 보았을 때, 강체의 운동이라 함은, 이 부분집합에 작용하는 isometry들이라고 생각할 수 있다. 따라서, 우리가 강체역학에서 구하고자 하는 것은, 함수

$$F_t : I \rightarrow Isom(\mathbb{R}^3)$$

가 된다. 이 때, $Isom(\mathbb{R}^3)$ 는 group of isometris of \mathbb{R}^3 이다. 앞에서와 같은 논리로, 시간 t 에서 물체의 실제 위치는

$$F_t(M)$$

으로 주어진다.

질점역학에서는 함수 $F_t : I \rightarrow Trans(\mathbb{R}^3)$ 를 구하는 것이 목표였음을 생각하면, 강체역학이 질점역학과 크게 다르지 않음을 알 수 있다. 한 가지 차이가 있다면, $Trans(\mathbb{R}^3)$ 가 아주 성질이 좋은 path들의 집합과 대응을 이루고, 따라서 미적분학의 도구를 바로 사용할 수 있는 반면 $Isom(\mathbb{R}^3)$ 는 그러한 대응을 쉽게 찾을 수 없다는 것이다. 대신 우리는 미적분학의 일종의 일반화인, 미분다양체론 (특히, Lie group theory)을 사용해 이러한 한계를 극복할 수 있다.

우선 논의를 간단히 하기 위해, $Isom(\mathbb{R}^3)$ 중에서 불가능한 경우와 이미 잘 알고 있는 경우를 제외하자. 우리는 사실 isometry중 translation에는 관심이 없다. translation은 이미 질량중심을 분석함으로써 질점역학의 문제로 환원이 가능하기 때문이다. 따라서 우리는 $Isom(\mathbb{R}^3)$ 중 $O(3)$ 부분에만 관심을 두면 된다. 하지만, $O(3)$ 중에서도 orientation을 바꾸는 변환은 물리적으로 불가능하다. 따라서 결국 우리는 $SO(3)$ 에만 관심을 가지면 충분하다. 이 때, $SO(3)$ 는 질량중심을 원점으로 하는 좌표계에서의 회전으로 해석할 수 있다. 이제 강체역학의 가장 중요한 부분은 함수

$$F_t : I \rightarrow SO(3)$$

를 찾는 것으로 환원되었다.

Definition 1. Differentiable curve $F_t : I \rightarrow SO(3)$ 를 \mathbb{R}^3 의 rigid motion이라 한다.

2 SO(3) and Sk-Symm(3)

앞 절에서 우리는 $F_t : I \rightarrow SO(3)$ 를 찾는 것이 강체역학의 핵심임을 알았다. 따라서 우리는 $SO(3)$ 의 여러 성질에 대해 알아 볼 필요가 있다. 안타깝게도, $SO(3)$ 는 다음과 같은 이유로 물리적으로 다루기에는 그다지 좋지 않다.

- $SO(3)$ 는 group이다. 수학적으로 group은 비교적 좋은 객체일수도 있지만 물리적으로는 전혀 좋지 않다. 물리에서 다루는 대부분의 것들은 벡터, 좀 더 일반적으로는 텐서의 형태를 가진다. 물리에서 group으로는 할 수 있는 것이 거의 없다.
- 게다가 $SO(3)$ 는 noncommutative group이다. 즉, 일반적으로 $AB \neq BA$ 이다.

하지만 다음과 같은 희망적인 성질이 있다. 우선 $SO(3)$ 는 metric space이다. 즉, 물리적으로 의미가 있는 ‘거리’라는 개념이 있다. 좀 더 정확하게, $A \in SO(3)$ 에 대해 그 거리 $\|A\|$ 는,

$$\|A\| = \sup_{|\mathbf{x}|=1} |A\mathbf{x}|$$

로 주어진다. 이 정의는 정확히 단위벡터 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ 를 변환 A 가 얼마나 멀리 보낼 수 있는지를 측정하는 것이다.

또한 $SO(3)$ 는 Lie group이다. 즉, 각 $A \in SO(3)$ 에서의 tangent space

$$T_A(SO(3)) := \left\{ \frac{dF_t}{dt} \Big|_{t=0} \mid F_t : I \rightarrow SO(3) \text{ a differentiable curve, } F_0 = A \right\}$$

를 생각할 수 있다. 이 때, differentiable curve란 $F_t = (f_{ij}(t))$ 일 때, 각 성분 $f_{ij}(t)$ 가 미분가능하다는 의미이고 dF_t/dt 란 각 성분을 미분한 것으로 생각하면 된다.² 앞으로는 $T_A(SO(3))$ 를 간단히 T_A 라 쓸 것이다. tangent space라는 것이 그 점 주변에서의 1차 근사를 준다는 점을 생각하면, 우리는 $SO(3)$ 대신 T_A 를 근사하는 새로운 객체, T_A 를 생각할 수 있다. 그 이름이 말해주듯, T_A 는 벡터 공간이므로 물리적으로 다루기가 대단히 편리하다. 이를 수학적으로는 다음과 같이 정리할 수 있다.

Definition 2. $SO(3)$ 의 identity I 에서의 tangent space, T_I 를 $SO(3)$ 의 Lie algebra라 부르고 $\mathfrak{so}(3)$ 라고 표기한다.

²일반적인 Lie group 혹은 differentiable manifold에 대해서는 이 정의를 사용할 수 없다. differentiable curve나 derivative에 대한 일반적인 정의는 조금 더 복잡하지만 우리의 논의에서는 불필요하다.

Theorem 1. $\mathfrak{so}(3)$ 는 Lie bracket $[A, B] = AB - BA$ 을 곱셈으로 하는 \mathbb{R} -algebra 구조를 가지며, \mathbb{R} -algebra로써, $Sk\text{-Symm}(3)$ 과 isomorphic하다. 특히, $\mathfrak{so}(3)$ 는 \mathbb{R} -vector space이며 $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{so}(3) = 3$ 이다.

Proof. 다음 책을 참고하라: [1]. □

당연히 $\mathfrak{so}(3)$ 는 vector space로써 \mathbb{R}^3 과 isomorphic하다. 이 뿐만이 아니고, 사실 $\mathfrak{so}(3)$ 은 algebra로써도 \mathbb{R}^3 와 isomorphic하며 이 isomorphism은 $\mathfrak{so}(3)$ 에 적당한 metric을 주었을 때, isometry가 된다.

Theorem 2. $\mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$ as an \mathbb{R} -algebra. 또한, $\mathfrak{so}(3)$ 에 다음과 같은 trace norm

$$(A|B) = -\text{trace}(AB), \quad A, B \in \mathfrak{so}(3)$$

을 주면, 이 isomorphism은 isometry가 된다.

Proof. 다음과 같이 $\mathfrak{so}(3)$ 의 기저를 잡는다:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

그러면,

$$[P, Q] = R, \quad [Q, R] = P, \quad [R, P] = Q$$

이므로 함수 $aP + bQ + cR \mapsto ae_1 + be_2 + ce_3$ 는 \mathbb{R} -algebra isomorphism임을 알 수 있다. □

Remark. 정리 2의 증명에서 기저 P, Q, R 의 선택은 canonical하지 않다. 하지만 위의 증명에서 선택한 기저는 나중에 대단히 유용하게 사용된다.

위의 정리에 의해, 앞으로 $\mathfrak{so}(3)$ 는 \mathbb{R}^3 와 identify된 것으로 본다.

T_I 가 $SO(3)$ 의 항등원 I 주변에서 $SO(3)$ 를 근사해준다는 것을 상기하자.³ 그렇다면 임의의 $A \in SO(3)$ 를 $\mathfrak{so}(3)$ 가 얼마나 잘 근사를 해 줄 수 있는지 궁금한 것은 당연하다. 이는 다음과 같은 정리에 의해 알 수 있다.

Theorem 3. 각각의 $A \in SO(3)$ 는 적당한 $B \in \mathfrak{so}(3)$ 에 대해

$$A = \exp B = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} B^n$$

꼴로 표현된다.

³이 개념이 잘 와닿지 않는다면 어떤 곡면 위의 한 점에서 tangent plane을 그려보라. 그 그림은 $SO(3)$ 와 그 tangent space에 대한 비교적 정확한 묘사가 된다.

정리 3의 증명은 Lie group에 대한 좀 더 많은 도구를 필요로 하므로 생략한다. 중요한 것은 SO(3)가 $\exp(B)$ 형태로 근사된다는 것이고, \exp 함수는 대단히 빠르게 수렴한다는 것이다. 따라서 우리는 $I \in SO(3)$ 근처의 원소 $A \in SO(3)$ 를

$$A \approx I + B, \quad B \in \mathfrak{so}(3)$$

의 형태로 매우 효과적으로 근사할 수 있다.

Remark. SO(3)에 metric이 어떻게 정의되어 있는지 상기해보면, 위의 근사가의 의미하는 바는 $M \subset \mathbb{R}^3$ 에 대해 $(I+B)(M)$ 의 ‘모양’과 $A(M)$ 의 ‘모양’ 사이에 큰 차이가 없음을 의미한다. 따라서 $A \approx I+B$ 는 물리적으로 의미가 있는 근사이다.

3 Rigid motion and SO(3)

이제 앞 절에서 알아낸 SO(3)의 성질을 이용해서 강체의 운동을 분석할 수 있다.

3.1 Angular velocity

우선 물리학에서 사용되어 온 용어들을 수학적으로 재정의하자.

Definition 3. $\mathfrak{so}(3)$ 의 원소를 infinitesimal rotation generator(IRG)라 한다.

이제 정리 2의 증명에서 잡은 $\mathfrak{so}(3)$ 의 기저 P, Q, R 가 어떤 회전을 만드는지 살펴보자.

Proposition 4. P, Q, R 은 각각 x, y, z 방향의 회전을 생성하는 IRG이다. 즉,

$$\begin{aligned} \exp \theta P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = R_x(\theta) \\ \exp \psi Q &= \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} = R_y(\psi) \\ \exp \phi R &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_z(\phi). \end{aligned}$$

이다.

Proof. Simple calculations! □

우리는 앞 절에서 I 와 충분히 가까운 $A \in SO(3)$ 를 $A \approx I + B$, $B \in \mathfrak{so}(3)$ 의 형태로 매우 효과적으로 근사할 수 있고 이 근사가 물리적으로 의미가 있음을 알았다. 따라서, $\mathfrak{so}(3)$ 의 원소가 아주 작은 회전을 만들어낸다는 말은 적절하다고 볼 수 있다. 이제 앞으로의 모든 등호는 ‘up to linear order’를 가정하기로 한다. 즉, $A = I + B$ 라 함은 up to linear order로써, A 와 $I + B$ 가 같음을 의미하는 것으로 해석한다.

이제 IRG의 기본적인이고도 중요한 성질을 증명하자:

Theorem 5. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ 를 임의의 벡터라고 하자. $R \in SO(3)$ 이 충분히 작은 rotation일 때,

$$R(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}$$

가 성립한다. 이 때, $\boldsymbol{\Omega} = \theta \mathbf{e}_1 + \psi \mathbf{e}_2 + \phi \mathbf{e}_3$ 는 정리 2에 의해 \mathbb{R}^3 와 identify된 $\mathfrak{so}(3)$ 의 원소이다.

Proof. 정리 3에 의해 적당한 $B = \theta P + \psi Q + \phi R \in \mathfrak{so}(3)$ 에 대해서 다음과 같이 쓸 수 있다:

$$R = I + B = \begin{pmatrix} 1 & -\phi & \psi \\ \phi & 1 & -\theta \\ -\psi & \theta & 1 \end{pmatrix}.$$

이제 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 에 대해,

$$\begin{aligned} R(\mathbf{x}) &= I\mathbf{x} + B\mathbf{x} = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 & -\phi & \psi \\ \phi & 0 & -\theta \\ -\psi & \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{x} + \begin{pmatrix} x_3\psi - x_2\phi \\ x_1\phi - x_3\theta \\ x_2\theta - x_1\psi \end{pmatrix} = \mathbf{x} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x} \end{aligned}$$

이므로 증명이 되었다. □

이제 $F_t : I \rightarrow SO(3)$ 를 differentiable curve라 하고 $F_0 = A \in SO(3)$ 라 하자. 그러면 그러면 t 가 0에 충분히 가까울 때, $A^{-1}F_t$ 는 I 에 가까워지며 따라서 우리는 정리 5에 의해,

$$(A^{-1}F_t)\mathbf{x} = \mathbf{x} + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{x}$$

를 만족시킨다. 이 때, $\boldsymbol{\Omega}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ 는 미분가능한 함수이다. 따라서,

$$F_t(\mathbf{x}) - F_0(\mathbf{x}) = A\boldsymbol{\Omega}(t) \times A\mathbf{x}$$

를 얻는다. 이 때, $\boldsymbol{\Omega}(0) = \mathbf{0}$ 임을 관찰하자. 그러므로

$$\mathbf{v} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_t(\mathbf{x}) - F_0(\mathbf{x})}{t} = A \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times F_0(\mathbf{x})$$

를 얻는다. 이 때, \mathbf{v} 는 $F_t(\mathbf{x})$ 의 $t = 0$ 에서의 속도이다. 이 때, $A(d\boldsymbol{\Omega}/dt) = F_0(d\boldsymbol{\Omega}/dt)$ 를 우리는 각속도(angular velocity)라 부른다. 따라서, 우리는 다음을 증명하였다.

Theorem 6. $F_t : I \rightarrow SO(3)$ 를 differentiable curve라 하자 (즉, \mathbb{R}^3 의 rigid motion이라 하자.). 임의의 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ 에 대해,

$$\mathbf{v}(t_0) = \left. \frac{dF_t(\mathbf{x})}{dt} \right|_{t=t_0} = \boldsymbol{\omega} \times F_{t_0}(\mathbf{x})$$

가 성립한다. 이 때, $\boldsymbol{\omega}$ 는 $t = t_0$ 에서의 각속도이다.

3.2 Angular momentum, moment of inertia and principal axis

이제 앞 절에서의 내용을 실제 역학과 관련짓고, 강체의 운동방정식을 찾는 작업을 진행해보자. 우리는 고전역학의 틀 내에서 강체의 운동을 기술하고자 하므로 모든 것의 기본은 당연히 뉴턴의 운동법칙이다.

Definition 4. $M \subset \mathbb{R}^3$ 를 주어진 강체라 하고 \mathbf{F} 를 물체 위의 점 $\mathbf{r} \in M$ 에 가해지는 힘이라고 하자. 다음 물리량

$$\boldsymbol{\tau} := \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

를 토크(torque)라고 부른다.

다음 정리는 뉴턴의 점질량에 대한 운동법칙 $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}_{net}$ 과 유사한 운동법칙을 강체역학에서도 만들 수 있음을 말해준다.

Theorem 7. $M \subset \mathbb{R}^3$ 를 주어진 강체라고 하고 M 의 질량중심과 \mathbb{R}^3 의 원점이 일치한다고 하자. $\boldsymbol{\tau} = \sum \boldsymbol{\tau}_i = \sum \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i$ 를 외부에서 강체에 가하는 총 알짜 토크라고 하자 (즉, 이 강체에 가해지는 모든 외부 토크의 합이다.). 기술적인 이유로, $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ 이라 하자. 그러면 적당한 행렬 \mathbf{I} 가 있어서 물리량 $\mathbf{L} := \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$ 가

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}$$

를 만족시키도록 할 수 있다. 이 때, \mathbf{I} 을 관성모멘트(moment of inertia)라 하고, \mathbf{L} 을 각운동량(angular momentum)라고 한다

Proof. 우선 i 번째 입자 $\mathbf{x}_i \in M \subset \mathbb{R}^3$ 에 작용하는 모든 힘을 외부에서 작용하는 알짜힘 \mathbf{F}_i 과 j 번째 입자가 i 번째 입자에 작용하는 내부 상호작용 \mathbf{f}_{ji} 로 나누자. 뉴턴의 운동법칙에 의해,

$$\mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{f}_{ji} = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$$

가 성립한다. 양 변에 $\mathbf{x}_i \times$ 를 취하고 모든 i 에 대해 합하면, 뉴턴의 (강한) 작용-반작용 법칙에 의해,⁴ $\sum_{i,j} \mathbf{x}_i \times \mathbf{f}_{ji} = \mathbf{0}$ 이므로

$$\sum_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\tau} = \sum_i m_i \mathbf{x}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$$

가 만족된다. 이 때,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i + \mathbf{x}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{x}_i \times \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$$

임을 주목하자. 또한, 정리 5에 의해, $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_i$ 이다. 따라서,

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_i m_i \frac{d}{dt}(\mathbf{x}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_i))$$

이다. 벡터해석의 기본적인 결과에 의하면 (BAC-CAB rule!),

$$\mathbf{x}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_i) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i(\mathbf{x}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} \|\mathbf{x}_i\|^2 - (\mathbf{x}_i \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{x}_i$$

가 성립한다. 이를 성분별로 풀어 쓰면,

$$\boldsymbol{\tau}_k = \frac{d}{dt} \sum_i m_i (\|\mathbf{x}_i\|^2 \omega_k - x_{ik}(x_{i1}\omega_1 + x_{i2}\omega_2 + x_{i3}\omega_3))$$

가 된다. 이제

$$\mathbf{I}_{jl} = \sum_i m_i (\|\mathbf{x}_i\|^2 \delta_{jl} - x_{ij}x_{il})$$

이라 두면, $\boldsymbol{\tau}_k = (d/dt) \sum_l \mathbf{I}_{kl} \omega_l = (d/dt)(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})_k = d\mathbf{L}_k/dt$ 가 성립한다. \square

⁴즉, 작용 반작용력이 그 부호가 반대일 뿐 아니라 두 점을 잇는 선 위에 있다는 뜻이다. 중심력 상호작용은 이런 성질을 가지며 대부분의 '고전적인' 상호작용은 이 성질을 만족한다. 우리는 고전역학의 세계에 있음을 기억하자!

정리 7에서 $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ 을 가정하지 않는 경우, 강체의 질량중심이 시간에 따라 계속 이동하게 된다. 이 경우 질량중심의 운동과 질량중심을 원점으로 하는 회전운동을 분리해서 기술해야 하는데 이 문제는 비관성좌표계를 도입함으로써 해결할 수 있다. 이 article에서는 질량중심이 이동하는 경우에 대해서는 다루지 않겠지만 본질적으로는 질량중심이 고정된 경우와 크게 다르지는 않다.

Definition 5. 강체 $M \subset \mathbb{R}^3$ 가 주어졌을 때, 행렬

$$I_{ij} = \sum_k m_k (\|\mathbf{x}_i\|^2 \delta_{ij} - x_{ki} x_{kj})$$

을 M 의 moment of inertia라고 부른다. 이 때, 합은 M 을 구성하는 모든 질점에 대해 이루어진다. $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ 로 표기하고 행렬 형태로 쓰면,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i y_i x_i & \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i z_i x_i & -\sum m_i z_i y_i & \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}$$

가 된다.

Definition 6. 강체 $M \subset \mathbb{R}^3$ 의 관성모멘트를 \mathbf{I} 라 하자. \mathbf{I} 의 고유벡터는 \mathbb{R}^3 의 기저를 이룬다. 이 기저를 M 의 주축(principal axis)라 한다.

Corollary 8. 임의의 강체의 관성모멘트는 대각화가 가능하다. 즉, 모든 강체는 주축을 가진다. 이 때, 얻는 고유값은 좌표축의 선택에 무관하며, 강체의 고유관성모멘트(principal moment of inertia)라 부른다. 만약 좌표축이 강체의 주축과 일치한다면 우리는 정리 7을 다음과 같이 간단하게 쓸 수 있다:

$$\boldsymbol{\tau}_i = \frac{d}{dt} \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{I}_i \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} = \mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

이 때, \mathbf{I}_i 는 주어진 강체의 고유관성모멘트이다.

Proof. 관성모멘트의 정의에서 보다시피, 관성모멘트는 강체의 모양과 무관하게 언제나 대칭행렬이 된다. \square

관성모멘트는 유일하지 않으며 좌표축의 선택에 따라 다양한 값을 가질 수 있다. 하지만 강체의 고유관성모멘트는 그야말로 강체가 가지는 고유한 양이므로 좌표축의 선택과 무관하다.

일반적으로 관성모멘트를 계산하는 것은 귀찮은 일이다. 한 가지 다행인 점은 관성모멘트에는 9개의 성분이 있지만 대칭성에 의해 그 중 6개만(!) 계산하면 충분하다는 것이다. 또한 우리가 축을 아주 잘 잡은 경우 대부분의 성분이

0이 되고 3개의 대각선 성분만 0이 아니게 만들 수 있다. 그럼에도 불구하고 임의의 강체에 대한 관성모멘트를 직접 계산하는 것은 사실상 불가능하고 강체가 아주 좋은 대칭성을 가진 경우에 한해서만(구, 직육면체, 실린더 등) 손으로 계산할 수가 있다⁵. 학부 수준의 고전역학 책⁶에서는 여러 종류의 강체에 대한 관성모멘트를 직접 계산한 예제들을 많이 찾아 볼 수 있다. 또한, 평행축정리나 수직축정리 등 관성모멘트를 계산할 때 도움이 되는 정리들을 찾아 볼 수도 있다. 관심 있는 독자들은 [3] 혹은 [4]을 참고하기 바란다.

모든 강체는 따름정리 8에 의해 주축을 가지고 이 경우 각운동량이 대단히 간단하게 표현된다. 문제는 강체는 시간에 따라 계속 회전을 하고 이에 따라 강체의 주축 역시 계속 변화한다는 것이다. 따라서 위의 식은 강체의 주축과 관찰자의 축이 일치하는 지극히 순간적인 경우에 성립하는 식이다. 만약 물체가 계속 회전한다면 관찰자의 축은 강체의 주축을 따라 계속 변화해야 한다. 이러한 경우 관찰자의 계(frame)는 더이상 관성기준계가 되지 않는다. 따라서 위의 식을 사용하기 위해서는 우리는 비관성계에 대한 지식이 필요하다.

3.3 Non-inertia frame

우선 다음과 같은 계(frame)에 대한 정의로 시작하자.

Definition 7. \mathbb{R}^3 을 미분다양체로 보았을 때, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ 에서의 frame은 $T_{\mathbf{x}}(\mathbb{R}^3)$ 의 ordered basis를 말한다. Moving frame X 란 \mathbb{R}^3 의 각 점 \mathbf{x} 에 frame $X_{\mathbf{x}}$ 을 대응시키는 함수이다.

이제, differentiable curve $F_t : I \rightarrow SO(3)$ 가 주어졌을 때, F_t 는 $\mathbf{0}$ 의 frame $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset T_{\mathbf{x}}(\mathbb{R}^3)$ 에 act하여 함수 $F^* : t \mapsto \{F_t \mathbf{e}_1, F_t \mathbf{e}_2, F_t \mathbf{e}_3\} \subset T_{\mathbf{0}}(\mathbb{R}^3)$ 을 induce한다. 이제 $X : I \rightarrow T_{\mathbf{0}}(\mathbb{R}^3)$ 를 미분가능한 함수⁷라 하자. 그리고 $[X_t]_B$ 를 X_t 의 $\mathbf{0}$ 에서의 frame(ordered basis) B 에 대한 coordinate라 하자.

Theorem 9. Differentiable curve $F_t : I \rightarrow SO(3)$ 와 induced map $F^*(t)$, 그리고 임의의 미분가능한 함수 $X : I \rightarrow T_{\mathbf{0}}(\mathbb{R}^3)$ 가 있을 때,

$$\frac{d[X_t]_{F^*(t_0)}}{dt} = \frac{d[X_t]_{F^*(t)}}{dt} \Big|_{t=t_0} + \boldsymbol{\omega} \times [X_{t_0}]_{F^*(t_0)}$$

가 성립한다.

⁵관성모멘트를 계산하는데는 물리적인 것이 전혀 필요없다. 그야말로 미적분학2의 다중 적분 연습문제라고 보면 된다.

⁶즉, 대학원 수준의 책에서는 이런 귀찮은 계산은 보통 생략되어 있다는 뜻이다.

⁷그냥 충분히 좋은 함수라고 생각하면 된다. 엄밀하게는 대응 $t \mapsto X_t(f) \in \mathbb{R}^3$ 이 모든 미분가능한 함수 f 에 대해 미분가능하다는 뜻이다.

Proof. Ordered basis $F^*(t_0) = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ 에 대하여 다음과 같이 쓰자:

$$X_t = x(t)\mathbf{b}_1 + y(t)\mathbf{b}_2 + z(t)\mathbf{b}_3.$$

그러면

$$[X_t]_{F^*(t_0)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

$$[X_t]_{F^*(t)} = F_t^{-1}F_{t_0} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = F_t^{-1}F_{t_0}[X_t]_{F^*(t_0)}$$

가 성립한다. 이제, $t \rightarrow t_0$ 일 때, $F_t^{-1}F_{t_0} \rightarrow I$ 이므로 정리 5에 의해, 적절한 미분가능한 Ω 가 있어서

$$[X_t]_{F^*(t_0)} = [X_t]_{F^*(t)} + F_{t_0}\Omega(t) \times [X_t]_{F^*(t)}$$

가 성립한다. 역시 $\Omega(t_0) = \mathbf{0}$ 임을 관찰하자. 따라서 우리는 다음을 얻는다:

$$[X_t]_{F^*(t)} - [X_{t_0}]_{F^*(t_0)} = [X_t]_{F^*(t_0)} - [X_{t_0}]_{F^*(t_0)} - F_{t_0}\Omega(t) \times [X_t]_{F^*(t)}.$$

양 변을 $t - t_0$ 로 나누고 $t \rightarrow t_0$ 의 극한을 취하면 원하는 결과를 얻는다. \square

정리 9는 정리 5의 일반화이다. 정리 9에서 $X_t = F_t\mathbf{e}_1$ 등으로 두어서 우변에 있는 미분이 사라지도록 하면 정리 5를 얻을 수 있다.

정리 9는 그 notation의 복잡성 때문에 식의 본질을 놓칠 수가 있는데, 이 정리가 말하고자 하는 바는, 고정된 계에서 측정된 것과 고정된 계에 대해 회전하는 계에서 측정된 것 어떤 벡터 물리량의 시간 변화량 사이에는 $\omega \times$ 만큼의 차이가 난다는 것이다. 이것을 많은 고전역학 책에서는 다음과 같이 쓴다⁸:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{fixed}} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{body}} + \omega \times .$$

우리의 문제 상황으로 돌아오면, 고정된 계에 대해 회전하는 계가 바로 강체의 주축으로 이루어진 계가 된다.

⁸이러한 표기법은 notation을 간략하게 해 주어 식의 ‘물리적인’ 본질을 바로 볼 수 있게 해 주는 장점이 있지만 동시에 notation abuse가 너무 심해서 식의 ‘수학적인’ 본질을 완전히 가려버리는 단점이 있다.

4 Euler's equations of rigid body

이제 우리는 강체운동의 $F = ma$ 라 할 수 있는 오일러의 운동방정식을 유도하고자 한다. 정리 9는 오일러 방정식을 얻는 데 핵심적인 역할을 한다.

Theorem 10 (Euler's equations of rotation). 강체 $M \subset \mathbb{R}^3$ 가 주어졌다. 원점이 강체의 질량중심과 일치한다고 하고 F_t 를 강체의 주축으로 이루어진 frame이라 하자. I_1, I_2, I_3 를 주어진 강체의 고유 관성모멘텀이라 하자. $\mathbf{N} = \sum \mathbf{x}_i \times \mathbf{F}_i$ 를 총 알짜 토크라고 하고, $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ 이라 하자. 그러면 다음 식이 성립한다:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1 &= I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 \\ \mathbf{N}_2 &= I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 \\ \mathbf{N}_3 &= I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1. \end{aligned}$$

Proof. 지금까지 나왔던 모든 이야기의 종합판이다. 정리 9에 의해

$$\frac{d[\mathbf{L}]_{F^*(t_0)}}{dt} = \frac{d[\mathbf{L}]_{F^*(t)}}{dt} \Big|_{t=t_0} + \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{L}]_{F^*(t_0)}$$

가 성립하며, frame $F^*(t)$ 는 언제나 강체의 주축이 되므로, 따름정리 8에 의해

$$[\mathbf{L}]_{F^*(t)} = \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix}$$

가 성립한다. 끝으로, 정리 7에 의해

$$\frac{d[\mathbf{L}]_{F^*(t_0)}}{dt} = \mathbf{N}$$

이다. 따라서

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{N}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \dot{\omega}_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix}$$

을 정리하면 원하는 결과를 얻는다. □

중요한 것은 정리 10의 한계를 아는 것이다. 이 정리를 유도하기까지 우리는 대단히 많은 근사를 했다. 우선 모든 등호가 'up to linear order'를 가정하고 있다는 것을 염두에 두자. 이러한 근사는 당연히 아주 짧은 순간에만 잘 적용된다. 따라서 이 가정은 정리 10가 아주 순간적인 경우에만 적용할 수 있다는 것을

말해준다. 즉 정리 10는 강체의 global한 운동에 대해서는 어떠한 정보도 주지 못한다. 이는 질점역학과 강체역학의 가장 큰 차이점 중 하나이다.

한편, 위의 식에서 강체의 고유관성모멘트 I_i 에는 강체의 모든 geomtry에 대한 정보가 담겨 있다. 따라서, 어떤 강체든, 그 실제적인 모양에 관계 없이 고유관성모멘트가 같다면 강체역학적으로는 완전히 동등함을 알 수 있다. 일반적으로 ellipsoid의 여러 parameter를 조절하면 임의의 고유관성모멘트를 가지도록 할 수 있는데, 이는 모든 강체는 동역학적인 관점에서는 적당한 ellipsoid와 동등하다고 볼 수 있다.

5 Examples

이제 몇 가지 예제를 통해 강체역학이 어떻게 적용되는지를 살펴보자.

Example 1 (2-dim rotation). 지금까지는 3차원 강체의 회전만을 다루었는데, 만약 강체가 어떤 축에 고정되어 있어서 그 축을 중심으로 회전한다면 우리는 이를 2차원 평면상의 회전으로 볼 수 있다. 이 경우 $F_t: I \rightarrow SO(2)$ 를 계산하는 것이 중요해지는데, $\dim \mathfrak{so}(2) = 1$ 임이 알려져 있다. 앞의 논리를 따르면, 2차원 회전은 한 개의 IRG를 가진다는 것인데 이는 우리의 직관과 잘 일치한다.

Example 2. 질량을 무시할 수 있는 길이 $2l$ 인 강체 막대의 중심에 질량이 m 이고 반지름이 R 인 두께를 무시할 수 있는 원판이 각도 45° 만큼 기울어져 꽂혀 있다 (그림 1참고). 이제 강체 막대를 각속도 ω 로 회전시킨다고 하자. 우리는 이번 예제에서 원판이 ‘덜경거리지’않기 위해서는 막대의 양 끝점에서 얼마만큼의 힘을 작용해야 하는지 계산해 볼 것이다. 우선 당연히 주축을 잡아야 한다.

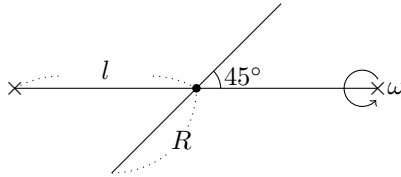


Figure 1: 예제 2의 side view

원론적으로 주축을 구하는 방법은 우선 임의의 축에 대해 관성모멘트를 계산한 후 이를 대각화하여 고유벡터를 구하는 것이다. 하지만 이런 방법은 매우 비효율적이다. 훨씬 나은 방법은 애초부터 관성모멘트를 계산할 축을 ‘영리하게’ 잡는 것이다. 대개 강체의 대칭축을 축으로 잡으면 주축이 된다. 이 문제의 경우 그림 2처럼 잡으면 된다.

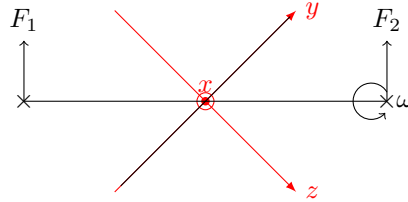


Figure 2: 예제 2의 주축

이 경우 $\boldsymbol{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\omega}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{z}}$ 이고, 덜컹거리지 않는다는 것은 $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$ 이란 뜻이다. 이제 오일러 방정식을 써 보면

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{\omega^2}{2}(I_z - I_y) \\ N_y &= 0 \\ N_z &= 0 \end{aligned}$$

을 얻는다. 이제, 막대의 양 끝에서 각각 F_1, F_2 의 힘을 윗방향으로 가한다고 하자. 막대와 원판이 중력장 내에서 낙하하지 않기 위해서 필요한 조건은 $F_1 + F_2 = mg$ 이고, 오일러 식에서 얻는 조건은 $(-F_1 + F_2)l = N_x$ 이다. 이를 종합하면,

$$F_1 = \frac{mg}{2} - \frac{\omega^2}{4l}(I_z - I_y), \quad F_2 = \frac{mg}{2} + \frac{\omega^2}{4l}(I_z - I_y)$$

가 된다. 이 때, I_z, I_y 에 계산된 원판의 관성모멘트를 넣어주면 된다.

Example 3 (Stability of rotation). 이번에는 중력장 내에서 운동하는 강체의 운동에 대해 알아보자. 우선 다음과 같은 명제를 증명할 수 있다.

Proposition 11. 강체 $M \subset \mathbb{R}^3$ 가 주어졌고, 강체의 무게중심과 원점이 일치한다고 하자. 이 때, 중력장에 의한 토크는 $\mathbf{0}$ 이다.

Proof. $\sum(\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{g}) = (\sum \mathbf{r}_i m_i) \times \mathbf{g} = \mathbf{0} \times \mathbf{g} = \mathbf{0}$. □

따라서, 물체에 다른 힘을 가하지 않는다면 중력장 내에서 회전하는 강체에 작용하는 토크는 없다. 이제 고유관성모멘트가 I_x, I_y, I_z 인 강체를 주축 중 하나를 골라(편의상 z 축이라 하자) 그 축을 중심으로 각속도 $\omega_z = \omega > 0$ 로 강하게 회전시킨 후 자유낙하시켰다고 하자. 이상적인 경우 강체는 $\omega_y = \omega_x = 0$ 인

상태를 유지하며 그대로 자유낙하할 것이다. 이제 회전의 안정성을 살펴보기 위해 낙하하는 강체에 아주 약한 힘이 작용하여, 0이 아닌 아주 작은 각속도 $\omega_x \neq 0$ 또는 $\omega_y \neq 0$ 를 가지게 된 상황을 생각해보자.

이 경우 오일러 방정식을 써 보자.

$$0 = I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z$$

$$0 = I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x$$

$$0 = I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_y \omega_x.$$

이 때, $\omega_x \omega_y$ 는 아주 작은 양이므로(섭동이론에서 섭동의 제곱항에 해당한다), $\omega_z = 0$ 으로 보아도 좋다. 즉, ω_z 는 상수로 취급해도 된다. 이제 위 식의 첫 번째 식을 미분한 뒤(ω_z 는 상수임을 기억하라) 두 번째 식을 대입해 다음을 얻을 수 있다⁹:

$$\ddot{\omega}_x + \frac{(I_z - I_y)(I_z - I_x)}{I_x I_y} \omega^2 \omega_x = 0.$$

$\Omega = \sqrt{\frac{(I_z - I_y)(I_z - I_x)}{I_x I_y}} \omega$ 라 두자. 그러면 위 식은

$$\ddot{\omega}_x + \Omega^2 \omega_x = 0$$

으로 쓸 수 있다. 이제 I_x, I_y, I_z 의 크기관계에 따라 Ω 가 실수 혹은 허수가 될 것이다. 만약 Ω 가 허수이면 위 식은 익숙한 조화진동자의 식이 되고, 약한 섭동에 대해서 ω_x 의 값은 유한한 범위 내에서 진동하게 된다. 즉, 회전운동은 안정적이게 된다. 만약 Ω 가 실수이면 위 식은 지수함수적으로 증가하는 해를 가지며 약한 섭동에 대해 ω_x 의 값은 매우 크게 변화하게 되며 이 경우 회전운동은 불안정하다.

일반적으로 $I_x < I_y < I_z$ 인 경우를 생각해 보면, 처음 회전을 강하게 주는 축을 무엇으로 하느냐에 따라 회전의 안정성이 결정된다. z 축으로 회전시킨 경우는 위 식에 의해 Ω 는 실수가 되고 회전은 불안정하다. y 축으로 회전시킨 경우 위와 같은 방법으로 해 보면 Ω 가 허수가 됨을 알 수 있다. 따라서 이 경우 회전은 안정하다. 끝으로 x 축으로 회전시킨 경우 Ω 는 실수가 되어서 회전은 불안정하다. 이는 고유관성모멘트가 모두 서로 다른 물체의 경우 세 주축 중 한 축에 대한 회전운동은 안정하지만 다른 두 축에 대한 회전운동은 불안정함을 말해준다.

이 현상은 실제로 실험해 볼 수도 있는데, 적당한 직육면체 모양의 강체를 준비해서 각 평면에 대해 스펀을 주어 던져보라. 정확히 한 평면에 대해서는 처음 던진 모양 그대로 떨어지겠지만 다른 두 평면에 대해서는 (많은 경우)던진 모양과 다르게 떨어지는 것을 볼 수 있다.

⁹ ω_y 에 대해서도 정확히 같은 식이 성립한다. 따라서 어느 변수로 논의를 진행해도 좋다.

References

- [1] Baker, *Matrix groups*, Springer, 2006.
- [2] Goldstein, Poole, and Safko, *Classical mechanics*, 3rd ed, Addison-Wesley, 2001.
- [3] Marion, and Thornton, *Classical dynamics of particles and systems*, 5th ed, Cengage Learning , 2007.
- [4] Symon, *Mechanics*, 3rd ed, Addison-Wesley, 1971.